

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЛГПУ»)

Институт физико-математического образования, информационных и
обслуживающих технологий
Кафедра фундаментальной математики

УТВЕРЖДАЮ

Директор Института физико-
математического образования,
информационных и обслуживающих
технологий

Е.Е. Горбенко

« 13 » сентября 2023 г.

Приложение к рабочей программе учебной дисциплины

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации
обучающихся по дисциплине

Дифференциальные и интегральные уравнения

По направлению подготовки
Профиль подготовки
образовании
Квалификация выпускника
Форма обучения
Курс

01.03.01 Математика

Математические и цифровые технологии в

бакалавр

очная

2, 3 курсы

Разработчик

Доцент, Давыскиба О.В.

Заведующий кафедрой

фундаментальной математики

Темникова С.В.

Протокол

от « 14 » января 2023 г. № 5

Луганск 2023

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

1.1. Область применения

Фонд оценочных средств (ФОС) – неотъемлемая часть рабочей программы дисциплины (модуля) «Дифференциальные и интегральные уравнения» и предназначен для контроля и оценки образовательных достижений студентов, освоивших программу дисциплины (модуля).

1.2. Цели и задачи фонда оценочных средств

Цель ФОС – установить соответствие уровня подготовки обучающегося требованиям ФГОС ВО бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика, утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 8 (с изменениями и дополнениями).

1.3. Перечень компетенций, формируемых в процессе освоения основной образовательной программы

Процесс освоения дисциплины направлен на овладение следующими компетенциями:

Код по ФГОС ВО	Индикатор достижения
Общепрофессиональные	
ОПК-1 – способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.	ОПК-1.1. Понимает значение накопления фундаментальных знаний в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.
	ОПК-1.2. Имеет представление об использовании фундаментальных знаний в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

1.4. Этапы формирования компетенций и средства оценивания уровня их сформированности

Этапы формирования компетенций	Компетенции	Контрольно-оценочные средства / способ оценивания
Дифференциальные уравнения первого порядка	ОПК-1	Устный опрос
Дифференциальные уравнения высших порядков	ОПК-1	Выполнение практических заданий
Промежуточная аттестация	ОПК-1	Зачет
Системы линейных дифференциальных уравнений	ОПК-1	Выполнение практических заданий
Элементы теории устойчивости	ОПК-1	Выполнение практических заданий
Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений	ОПК-1	Выполнение практических заданий

Уравнения в частных производных	ОПК-1	Выполнение практических заданий
Промежуточная аттестация	ОПК-1	Экзамен (письменный)
Численные методы решения дифференциальных уравнений	ОПК-1	Выполнение практических заданий
Интегральные уравнения	ОПК-1	Выполнение практических заданий
Интегральные преобразования и интегральные уравнения	ОПК-1	Выполнение практических заданий
Промежуточная аттестация	ОПК-1	Экзамен (письменный)

1.5. Описание показателей формирования компетенций

Код и наименование компетенции	Показатели достижения компетенций (знать, уметь, владеть)
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	<p>Знает: основные понятия и их геометрический смысл; общую теорию линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений; схемы решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами; теоретические основы методов интегрирования дифференциальных уравнений и систем, качественную теорию дифференциальных уравнений, основные отрасли применения дифференциальных уравнений; основные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого и старших порядков;</p> <p>Умеет: определять тип дифференциальные уравнения; интегрировать известные типы обыкновенных дифференциальных уравнений, проводить качественное исследование решений, составлять дифференциальные уравнения; классифицировать дифференциальные уравнения и применять необходимые методы для решения этих уравнений;</p> <p>Владет навыками: методами решения дифференциальных уравнений первого порядка; методами решения линейных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами, навыками использования математического аппарата для решения прикладных задач.</p>

1.6. Критерии оценивания компетенций на разных этапах их формирования

Система оценивания учебных достижений студентов очной формы обучения

Вид учебной работы	Количество баллов
4 семестр	
Выполнение письменных домашних заданий	15
Решение контрольных работ (КСР)	20
Решение задач у доски	25
Зачет	40

Итого за семестр:	100
5 семестр	
Выполнение письменных домашних заданий	10
Решение контрольных работ (КСР)	20
Решение задач у доски	20
Экзамен (письменный)	50
Итого за семестр:	100
6 семестр	
Выполнение письменных домашних заданий	10
Решение контрольных работ	20
Решение задач у доски (КСР)	20
Экзамен (письменный)	50
Итого за семестр:	100

Накопительная система оценивания по 100-балльной шкале

Четырехбал- льная система оценивания экзамена	100- балльная шкала	Буквенная шкала, соответствующая 100- балльной шкале	Система оценивания зачета
Отлично	90–100	А – отлично – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному	Зачтено
Хорошо	83–89	В – очень хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения большинства из них оценено числом баллов, близким к максимальному	
Хорошо	75–82	С – хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью; некоторые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы недостаточно; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения ни одного из них не оценено минимальным числом баллов, некоторые виды заданий выполнены с ошибками	
Удовлетво- рительно	63–74	Д – удовлетворительно – теоретическое содержание дисциплины освоено частично, но пробелы не носят существенного характера; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; большинство	

		предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий, содержат ошибки	
Удовлетворительно	50–62	Е – посредственно – теоретическое содержание курса освоено частично; некоторые практические навыки работы не сформированы, многие предусмотренные программой обучения учебные задания не выполнены либо качество выполнения некоторых из них оценено числом баллов, близким к минимальному	
Неудовлетворительно	21–49	FX – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса освоено частично; необходимые практические навыки работы не сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий не выполнено либо качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимальному; при дополнительной самостоятельной работе над материалом курса возможно повышение качества выполнения учебных заданий	Не зачтено
Неудовлетворительно	0–20	F – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса не освоено; необходимые практические навыки работы не сформированы; все выполненные учебные задания содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом курса не приведет к какому-либо значимому повышению качества выполнения учебных заданий	

2. КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА

2.1. Оценочные средства текущего контроля (типовые)

Вопросы для устного опроса:

1. Какое уравнение называется обыкновенным дифференциальным?
2. Что называется порядком дифференциального уравнения?
3. Что называется решением дифференциального уравнения?
4. Что такое интеграл дифференциального уравнения?
5. Что такое интегральная кривая?
6. Что представляет собой интегрирование дифференциального уравнения?
7. Какие дифференциальные уравнения являются интегрируемыми в квадратурах?
8. Какое уравнение называется разрешенным относительно производной?
9. Дайте определение общее решение дифференциального уравнения.
10. Дайте определение частное решение дифференциального уравнения.
11. Системы дифференциальных уравнений. Теорема о существовании и единственности.

12. Сведение системы к уравнению порядка n . Системы в симметричной форме. Метод интегрируемых комбинаций.
13. Определитель Вронского для систем. Фундаментальная система решений.
14. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера. Характеристическое уравнение. Запись решений в зависимости от корней.
15. Решение однородных систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
16. Решение неоднородных систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
17. Устойчивость по Ляпунову. Метод функций Ляпунова, основные теоремы метода.
18. Устойчивость по первому приближению.
19. Динамические системы. Основные понятия динамических систем (траектории, инвариантные множества и их свойства, предельные множества и их свойства, особые и периодические точки.). Пример.
20. Типы особых точек однородной системы 2 порядка.
21. Численные методы решения дифференциальных уравнений и систем.
22. Уравнения в частных производных первого порядка.
23. Основные понятия функционального анализа (норма, метрика, скалярное произведение, ортонормированный базис в функциональных пространствах, сходимости.). Принцип сжатых отображений.
24. Интегральные уравнения Фредгольма, Вольтерра и их простейшие свойства. Интегральный оператор и его свойства. Связь решений однородных и неоднородных уравнений.
25. Уравнение Фредгольма с вырожденным ядром. Сведение к алгебраической системе. Коэффициенты этой системы.
26. Метод итераций. Итерированные ядра.
27. Метод Фредгольма. Теорема об однозначном разрешении интегрального уравнения. Разрешающее ядро. Альтернатива Фредгольма.
28. Самосопряженный интегральный оператор, его собственные значения и функции.
29. Интегральное уравнение с симметричным ядром.
30. Задача Штурма-Лиувилля и краевая задача. Функция Грина.

Вопросы для проведения контрольной работы:

Задание 1. Найти общее решение дифференциальных уравнений.

а) $(xy + y)dx + (xy + x)dy = 0$.

б) $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$.

в) $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$.

Задание 2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$.

Задание 3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} x' = -7x + y \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$$

Задание 4. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(0,1)$, для которой треугольник, образованный осью Oy , касательной к кривой в произвольной её точке и радиус-вектором точки касания, равнобедренный (причем основанием его служит отрезок касательной от точки касания до оси Oy).

Задание 5.

- а) Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = x^2$.
- б) Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'' + y' = (y')^2$.
- в) Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = (y')^2$.

Практические задания:

1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциальных уравнений:

- а) $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$;
- б) $(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx$;
- в) $y = xy'^2 + y'$;
- г) $y'x + y = -xy^2$;
- д) $(2x - ye^{-x})dx + e^{-x}dy = 0$;
- е) $y = xy' - y'^4$.

2. Найти решение задачи Коши: $y' - \frac{y}{x} = x^2$; $y(1) = 0$.

3. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(2;5)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в 8 раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат.

4. Проинтегрировать уравнения:

- а) $y'' + \frac{1}{x}y' = 0$;
- б) $yy'' + y'^2 = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$.

5. Определить и записать структуру частного решения y^* линейного неоднородного дифференциального уравнения по виду функции $f(x)$:

$$3y'' - 7y' + 2y = f(x); \text{ а) } f(x) = 3xe^{2x}; \text{ б) } f(x) = \sin 2x - 3\cos 2x.$$

6. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения:

$$y^{(6)} - 9y'' = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = -1; \quad y''(0) = 0; \quad y'''(0) = 0; \quad y^{(4)}(0) = 0.$$

7. Решить задачу Коши: $4y'' - 8y' + 5y = 5\cos x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = -\frac{1}{13}$.

8. Найти общее решение уравнения: $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$.

9. Найти общее решение: $\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = -10y - z. \end{cases}$

10. Решить задачу Коши: $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 - x^2 + x - 2, \\ y_2' = -2y_1 + 4y_2 + 2x^2 - 4x - 7, \end{cases}$

если $y_1 = 0, y_2 = 2$ при $x = 0$.

11. Спрос и предложение. Пусть в течение некоторого (достаточно продолжительного) времени крестьянин продает на рынке фрукты (например, яблоки), причем продает их после уборки урожая с недельными перерывами. Тогда при имеющихся у крестьянина запасах фруктов недельное предложение будет зависеть как от ожидаемой цены в наступающей неделе, так и от предполагаемого изменения цены в последующие недели. Если в наступающей неделе предполагается, что цена упадет, а в последующие недели повысится, то предложение будет сдерживаться при условии превышения ожидаемого повышения цен над издержками хранения. При этом предложение товара в ближайшую неделю будет тем меньшим, чем большим предполагается в дальнейшем повышение цены. И наоборот, если в наступающей неделе цена будет высокой, а затем ожидается ее падение, то предложение увеличится тем больше, чем большим предполагается понижение цены в дальнейшем. Составить дифференциальное уравнение, описывающее процесс формирования цены при условии равновесия между спросом и предложением.

12. Рост денежных вкладов. Сумма A руб. положена в банк под r % в год. Найти закон изменения суммы при условии, что приращение начисляется непрерывно.

13. Эффективность рекламы. Предположим, что торговыми учреждениями реализуется продукция B , о которой в момент времени $t = 0$ из числа потенциальных покупателей N знает лишь x человек. Предположим далее, что для ускорения сбыта продукции B были даны рекламные объявления по радио и телевидению. Последующая информация о продукции распространяется среди покупателей посредством общения друг с другом. Построить закон изменения $x(t)$.

14. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение:

$$\varphi(x) = x - \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt$$

15. С помощью резольвенты найти решение интегрального уравнения:

$$\varphi(x) = \sin x + 2 \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt$$

16. Решить интегральное уравнение с вырожденным ядром:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \arccos t \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации (экзамен)

1. Определение дифференциального уравнения.
2. Символическая запись дифференциального уравнения.
3. Обыкновенное дифференциальное уравнение.
4. Порядок дифференциального уравнения.
5. Решение дифференциального уравнения.
6. Вид дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной.
7. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.
8. Геометрический смысл теоремы о существовании и единственности решения ДУ.
9. Общее решение дифференциального уравнения.
10. Частное решение дифференциального уравнения.
11. Особое решение.
12. Начальные условия.
13. Задача Коши.
14. Геометрический смысл общего интеграла и частного решения дифференциального уравнения.
15. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка.
16. Определение изоклины.
17. Изогональные траектории.
18. Ортогональные траектории.
19. Общий вид уравнения с разделенными переменными.
20. Как получить общий интеграл дифференциального уравнения с разделенными переменными.
21. Общий вид уравнения с разделяющимися переменными.
22. Что значит разделить переменные?
23. С помощью какого преобразования можно разделить переменные?
24. Что такое интегральная кривая?
25. Чем отличается общее решение дифференциального уравнения от его частного решения?
26. Определение функции n -го измерения (порядка)
27. Определение однородного дифференциального уравнения.
28. Как определить порядок (измерение) функции?
29. Как проверить, является ли уравнение однородным?
30. Способ решения однородных ДУ.
31. Какая подстановка используется для решения однородного уравнения?
32. Какое дифференциальное уравнение называется линейным?
33. В чем состоит метод Бернулли решения линейного уравнения?
34. Какая подстановка для решения линейного уравнения используется при решении его методом Бернулли?
35. Метод Лагранжа решения линейного уравнения.

36. На какое выражение нужно умножать обе части уравнения Бернулли, записанного в стандартном виде, для приведения его к линейному уравнению?
37. Какая подстановка позволяет привести уравнение Бернулли к линейному?
38. Алгоритм решения уравнения Бернулли.
39. Какое условие нужно проверить, чтобы выяснить, является ли дифференциальное уравнение уравнением в полных дифференциалах?
40. Общий вид уравнения в полных дифференциалах.
41. Алгоритм решения дифференциального уравнения в полных дифференциалах.
42. Общий вид однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
43. Как составить характеристическое уравнение для заданного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами?
44. Какой вид имеет общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка, если его характеристическое уравнение имеет 2 различных действительных корня?
45. Какой вид имеет общее решение однородного дифференциального уравнения, если его характеристическое уравнение имеет 2 одинаковых действительных корня?
46. Какой вид имеет общее решение однородного дифференциального уравнения, если его характеристическое уравнение имеет 2 комплексных корня?
47. Какой вид имеет общее решение однородного дифференциального уравнения, если его характеристическое уравнение имеет один вещественный и два комплексных корня?
48. Какой вид имеет общее решение однородного дифференциального уравнения, если его характеристическое уравнение имеет 2 одинаковых вещественных корня и два комплексных корня?
49. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения.
50. От чего зависит общий вид частного решения неоднородного уравнения? Как связан общий вид частного решения неоднородного уравнения с корнями соответствующего однородного уравнения?
51. Метод Лагранжа для решения дифференциальных уравнений высших порядков.
52. Метод неопределенных коэффициентов.
53. Какая система дифференциальных уравнений называется нормальной?
54. Какой вид имеет характеристическое уравнение для системы уравнений с постоянными коэффициентами с двумя переменными?
55. Преобразование Лапласа.
56. Преобразование Меллина.
57. Метод Винера-Хопфа.
58. Преобразование Фурье.
59. Уравнения Фредгольма и Вольтерра первого и второго рода.
60. Однородное уравнение Фредгольма второго рода.

61. Метод последовательных приближений решения интегральных уравнений. Построение решения уравнения Фредгольма второго рода.
62. Метод последовательных приближений решения интегральных уравнений. Построение решения уравнения Вольтерра второго рода.
63. Решение уравнений Фредгольма второго рода с вырожденным ядром.
64. Решение уравнений Вольтерра второго рода с вырожденным ядром.
65. Понятие резольвенты.
66. Решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода с помощью резольвенты.
67. Понятие ядра.
68. Собственное значение и собственный вектор.
69. Связь интегральных уравнений с дифференциальными уравнениями.
70. Примеры физических задач, приводящих к интегральным уравнениям.