

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ


ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЛГПУ»)

Институт физико-математического образования, информационных и
обслуживающих технологий
Кафедра фундаментальной математики

УТВЕРЖДАЮ

Директор Института физико-
математического образования,
информационных и обслуживающих
технологий



 Е.Е. Горбенко

«13»  2023 г.

Приложение к рабочей программе учебной дисциплины

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации
обучающихся по дисциплине

Алгебра

По направлению подготовки 01.03.01 Математика
Профиль подготовки Математические и цифровые технологии в образовании
Квалификация выпускника бакалавр
Форма обучения очная
Курс 1, 2

Разработчик
доцент Скринникова А.В.
Заведующий кафедрой фундаментальной
математики

 Темникова С.В.

Протокол
от «04»  2023 г. № 5

Луганск, 2023

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

1.1. Область применения

Фонд оценочных средств (ФОС) – неотъемлемая часть рабочей программы дисциплины «Алгебра» и предназначен для контроля и оценки образовательных достижений студентов, освоивших программу дисциплины.

1.2. Цели и задачи фонда оценочных средств

Цель ФОС — установить соответствие уровня подготовки обучающегося требованиям ФГОС ВО бакалавриата по направлению подготовки 01.03.01 Математика, утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 8 (с изменениями и дополнениями).

1.3. Перечень компетенций, формируемых в процессе освоения основной образовательной программы

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций и индикаторов их достижения:

Код по ФГОС ВО	Индикатор достижения
Общепрофессиональная	
ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности.	ОПК-1.2. Имеет представление об использовании фундаментальных знаний в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

1.4. Этапы формирования компетенций и средства оценивания уровня их сформированности

Этапы формирования компетенций	Компетенции	Контрольно-оценочные средства / способ оценивания
Тема 1 Матрицы	ОПК-1	Оценивание решения задач у доски, письменных домашних заданий, устный опрос
Тема 2 Определители матриц	ОПК-1	Оценивание решения задач у доски, письменных домашних заданий, устный опрос
Тема 3 Системы линейных алгебраических уравнений	ОПК-1	Оценивание решения задач у доски, письменных домашних заданий, устный опрос
Тема 4 Однородные системы линейных уравнений	ОПК-1	Оценивание решения задач у доски, письменных домашних заданий, контрольной работы, устный опрос
Тема 5 Линейные пространства	ОПК-1	Оценивание решения задач у доски, письменных домашних заданий, устный опрос
Тема 6 Комплексные числа	ОПК-1	Оценивание решения задач у доски, письменных домашних заданий, контрольной работы, устный опрос

Тема 7 Полиномы	ОПК-1	Оценивание решения задач у доски, письменных домашних заданий, устный опрос
Тема 8 Векторная алгебра	ОПК-1	Оценивание решения задач у доски, письменных домашних заданий, устный опрос
Тема 9 Линейные операторы	ОПК-1	Оценивание решения задач у доски, письменных домашних заданий, устный опрос
Тема 10 Квадратичные формы	ОПК-1	Оценивание решения задач у доски, письменных домашних заданий, контрольной работы, устный опрос
Тема 11 Отношения и алгебраические операции на множестве	ОПК-1	Оценивание решения задач у доски, письменных домашних заданий, устный опрос
Тема 12 Группы	ОПК-1	Оценивание решения задач у доски, письменных домашних заданий, устный опрос
Тема 13 Кольца	ОПК-1	Оценивание решения задач у доски, письменных домашних заданий, устный опрос
Тема 14 Поля	ОПК-1	Оценивание решения задач у доски, письменных домашних заданий, устный опрос, реферат
Тема 15 Решетки	ОПК-1	Оценивание решения задач у доски, письменных домашних заданий, контрольной работы, рефератов, устный опрос
Промежуточная аттестация	ОПК-1	Экзамен

1.5. Описание показателей формирования компетенций

Код компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели)
ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности.	ОПК-1.2. Имеет представление об использовании фундаментальных знаний в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

1.6. Критерии оценивания компетенций на разных этапах их формирования

Вид текущей учебной работы	Количество баллов
Работа на практических занятиях	20
Контроль самостоятельной работы	30
Экзамен (письменный)	50
Итого за семестр:	100

Накопительная система оценивания по 100-балльной шкале

Четырехбал-	100-	Буквенная шкала, соответствующая 100-	Система
-------------	------	---------------------------------------	---------

льная система оценивания экзамена	балльная шкала	балльной шкале	оценивания зачета
Отлично	90–100	А – отлично – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному	Зачтено
Хорошо	83–89	В – очень хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения большинства из них оценено числом баллов, близким к максимальному	
Хорошо	75–82	С – хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью; некоторые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы недостаточно; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения ни одного из них не оценено минимальным числом баллов, некоторые виды заданий выполнены с ошибками	
Удовлетво- рительно	63–74	Д – удовлетворительно – теоретическое содержание дисциплины освоено частично, но пробелы не носят существенного характера; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий, содержат ошибки	
Удовлетво- рительно	50–62	Е – посредственно – теоретическое содержание курса освоено частично; некоторые практические навыки работы не сформированы, многие предусмотренные программой обучения учебные задания не выполнены либо качество выполнения некоторых из них оценено числом баллов, близким к минимальному	
Неудовлетво- рительно	21–49	FX – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса освоено частично; необходимые практические навыки работы не сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий не выполнено либо качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимальному; при	Не зачтено

		дополнительной самостоятельной работе над материалом курса возможно повышение качества выполнения учебных заданий	
Неудовлетворительно	0–20	F – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса не освоено; необходимые практические навыки работы не сформированы; все выполненные учебные задания содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом курса не приведет к какому-либо значимому повышению качества выполнения учебных заданий	

2. КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА

2.1. Оценочные средства текущего контроля (типовые)

Вопросы для устного опроса

1. Сформулируйте определение группы.
2. Сформулируйте теорему о гомоморфизме групп.
3. Что называют сигнатурой алгебры?
4. Является ли $\langle \mathbb{N}; +, -, \cdot \rangle$ алгебраической системой?
5. Доказать, что алгебры $\langle \mathbb{Q}; +, \cdot \rangle$ и $\langle \mathbb{Z}; +, \cdot \rangle$ неизоморфны.
6. Найти количество автоморфизмов модели $\langle \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}; r \rangle$, где r – отношение взаимной простоты.
7. Какая матрица является невырожденной?
8. Что называется рангом матрицы?
9. Какие способы вычисления определителей вы знаете?
10. Какую операцию называют алгебраической?
11. Дайте определение и простейшие свойства поля.
12. Идеалы кольца и определение факторкольца по идеалу.
13. Теорема о гомоморфизме колец: $A/\text{Ker } \varphi \cong \varphi(A)$.
14. Наибольший общий делитель в кольце главных идеалов.
15. Алгоритм Евклида в кольце многочленов над полем.
16. Простейшие подполя и характеристика поля.
17. Китайская теорема об остатках в кольцах главных идеалов.
18. Функция Эйлера.
19. Теорема о характеристике конечной абелевой группы.
20. Дайте понятие нейтрального элемента группы
21. Дайте понятие симметричного элемента группы
22. Делители нуля
23. Приведите примеры групп
24. Приведите примеры полей
25. Приведите примеры колец
26. Приведите примеры решеток
27. Понятие квадратичной формы
28. Матрично-векторный вид квадратичной формы.
29. Канонический вид квадратичной формы.
30. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы.
31. Критерий Сильвестра.
32. Системы линейных алгебраических уравнений: определение, примеры.
33. Свойства СЛАУ: совместность, несовместность, определенность, неопределенность.
34. Эквивалентность систем, элементарные преобразования систем.

35. Матрицы, операции над ними и их свойства. Транспонирование матриц.
36. Определитель матрицы. Вычисление определителей.
37. Свойства определителей.
38. Миноры и алгебраические дополнения, их связь с определителем матрицы.
39. Теорема Лапласа
40. Алгоритм нахождения обратной матрицы.
41. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.
42. Свойства ранга матрицы.
43. Метод исключения переменных Гаусса.
44. Метод Крамера решения СЛАУ.
45. Теорема Кронекера-Капелли.
46. Общее решение СЛАУ. Частные решения.
47. Базисные и свободные неизвестные.
48. Однородные системы линейных уравнений
49. Что означает решить СЛАУ?
50. Фундаментальная система решений СЛАУ.
51. Что называется собственным вектором
52. Можно ли умножать матрицы размером 3×4 и 4×3 , 4×3 и 3×4 ? Почему?
53. Как расположены главная и побочная диагонали матриц?
54. Что означает транспонировать матрицу?
55. Когда однородная СЛАУ имеет ненулевое решение?
56. Чем фундаментальная система решений отличается от частного решения?
57. Что называют характеристическим многочленом и уравнением матрицы?
58. Что называют базисом векторов?
59. Укажите свойства линейно зависимой системы векторов.
60. Какие векторы называют ортогональными?
61. Какую матрицу называют унитарной?
62. Верно ли, что, что матрица унитарна тогда и только тогда, когда все ее собственные значения по модулю равны единице?
63. Дайте определение таблицы Кэли.

Темы для рефератов

1. Матричные представления генетических алфавитов
2. Матрицы вращения, изотропные матрицы: теория и практика
3. Изометрические изоморфизмы
4. Основные научные достижения Гаусса и Крамера
5. Матрицы в исследованиях ДНК-секвенций
6. Матрицы в биоэлектрическом управлении
7. Биомеханика движений и матрицы
8. Применение линейной алгебры при разработке компьютерных игр
9. Алгебраические свойства систем генетических алфавитов
10. Решение задач линейной алгебры с помощью пакета MathCAD.
11. Решение задач линейной алгебры с помощью пакета MSExcel

Вопросы для проведения домашней контрольной работы

1. Сформулировать основные определения комплексного числа и формы представления.
2. Как записывается комплексное число в алгебраической (тригонометрической) форме и по каким правилам проводятся арифметические операции над ними
3. Что означает в определении комплексного числа фраза «упорядоченная пара действительных чисел»?
4. В каком случае комплексное число является обычным действительным числом?
5. При каких условиях считается, что два комплексных числа равны?
6. По каким правилам осуществляются действия и находятся: сумма, разность, произведение и частное двух комплексных чисел?
7. Какое комплексное число называется сопряженным к заданному и какими свойствами оно обладает?

8. Что называют «мнимой единицей», как ее обозначают, и что получается при возведении ее в старшую степень ?
9. Что называют комплексной плоскостью, действительной и мнимой осями и как изображается комплексное число на комплексной плоскости?
10. Что называют «модулем» и «аргументом» комплексного числа? Каковы их возможные значения для множества точек комплексной плоскости?
11. В каких пределах значений находится «главное значение аргумента комплексного числа»?
12. Запишите комплексное число в алгебраической и тригонометрической формах, а также основные соотношения связывающие их.
13. По каким правилам осуществляются действия над комплексными числами в тригонометрической форме: произведение, возведение в степень, деление?
14. Какой вид имеет формула Муавра при возведении комплексного числа в натуральную степень?
15. Что называют «корнем n -й степени из комплексного числа»?
16. Сколько возможных значений имеет корень степени $n=5$ из комплексного числа $z=1-2i$?
17. Как выглядит общая формула Муавра для извлечения корня n -й степени из комплексного числа ?
18. Как выглядит показательная форма комплексного числа и записывается формула Эйлера?
20. С помощью формулы Эйлера запишите операции умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.
21. Какая система уравнений называется однородной?
22. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли?
23. Дайте геометрическую интерпретацию
24. Какие методы решения систем линейных уравнений вы знаете?
25. Когда однородная система имеет ненулевое решение?
26. Чем фундаментальная система решений отличается от частного решения?
27. Что называют характеристическим многочленом и уравнением матрицы?
28. Что называют линейным пространством?
29. Какие векторы называются коллинеарными?
30. В чем заключается свойство аддитивности линейного пространства?
31. Как обозначают линейное n -мерное пространство?
32. Сформулируйте основную теорему алгебры.
33. Какие многочлены называют симметрическими?
34. Запишите элементарные (или основные) симметрические многочлены
35. Запишите общую формулу или производящую функцию элементарных (или основных) симметрических многочленов

Практические задания

1. Вычислить матричный полином $P(A)$, где $p(x) = x^2 - 3x + 9$,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

3. Вычислить определитель матрицы системы из п.2

а) по правилу треугольников

в) разложением определителя по строке (столбцу)

4. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы (выписать определитель системы, все алгебраические дополнения, присоединенную матрицу системы).

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 15 \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases}$$

5. Решить систему уравнений из п.4 по правилу Крамера.

6. Решить матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

7. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и неопределенность, не решая ее.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 11 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 8 \end{cases}$$

8. Исследовать систему линейных уравнений. Если она совместна, указать базисный минор, базисные и свободные переменные. Решить систему методом Крамера. Выписать общее и одно частное решение.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

9. Найти собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

10. Привести к каноническому виду уравнение поверхности (ответ: эллиптический цилиндр):

$$2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 4x_1 - 2x_2 = 0. \text{ Сделать чертеж.}$$

11. Привести к каноническому виду уравнение поверхности: $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 = 16$.

12. Привести к каноническому виду уравнение линии: $4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_1 - 14x_2 + 7 = 0$.

13. Привести к каноническому виду уравнение поверхности:

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 3 = 0.$$

14. Записать квадратичную форму в матрично-векторном виде. Выяснить, является ли квадратичная форма положительно определенной, отрицательно определенной, неопределенной. $\zeta = 3x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3$.

15. Образуют ли подгруппу в группе всех ортогональных операторов евклидова пространства: а) подмножество операторов с определителем, равным 1; б) подмножество операторов с определителем, равным -1?

16. Даны два комплексных числа $z_1 = 1 - \frac{7}{2}i$; $z_2 = -7 - 2i$. Найти а) значение $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{-4}$ в

алгебраической форме, б) для числа $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ найти тригонометрическую форму, найти z^{20} , найти корни уравнения $w^3 + z = 0$.

17. Определить на комплексной плоскости области, задаваемые условиями:

$$1) |z| = 5; 2) |z| \leq 6; 3) |z - (2+i)| \leq 3; 4) 6 \leq |z - i| \leq 7.$$

18. Будет ли аддитивной/мультипликативной группой целых чисел: $(\mathbb{Z}, +)$, $(2\mathbb{Z}, +)$, (\mathbb{Z}, \cdot) , $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, +)$, $(2\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Примерный вариант контрольной работы

1. Решить систему уравнений методом Гаусса (

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 5 \\ -x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -1 \end{cases}$$

2. Вычислить значение выражения $P(A) = A^2 - 4 \cdot A + 13 \cdot E$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить главный определитель матрицы системы задания 1.

4. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и неопределенность, не решая ее.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

2.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации (экзамен)

1. Понятие ортогонального и ортонормированного базисов. Основные теоремы.

2. Определить совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение $AX=B$ где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Понятие евклидова пространства. Свойства нормы вектора.

5. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

6. Даны два комплексных числа $z_1 = 1 - i$; $z_2 = \sqrt{3} + i$. Найти: а) представление z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах, б) показать z_1 и z_2 на комплексной плоскости и найти их сумму геометрически.

7. Линейное n -мерное пространство. Базис и размерность. Теоремы о базисе.

8. Вычислить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

9. В пространстве V^3 задан базис $e: \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Векторы

$$\vec{e}'_1 = 5\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3,$$

$$\vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2,$$

$$\vec{e}'_3 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

образуют новый базис e' . Найти координаты вектора $\vec{a} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3$ в новом базисе e' .

10. Понятие линейного и векторного пространств.

11. Понятие однородных и неоднородных СЛАУ. Понятие решения СЛАУ: общего, частного.

12. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

13. Найти фундаментальную систему решений системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

14. Понятие матрицы. Операции над матрицами.

15. Решить уравнение: $z^2 + 5z + 4 - 3i = 0$.

16. Доказать, что векторы $\vec{p} = \{1; 3; 0\}$, $\vec{q} = \{2; -1; 1\}$, $\vec{r} = \{0; -1; 2\}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{a} = \{6; 12; -1\}$ в этом базисе.

17. Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + 3z = -2 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

18. Понятие комплексного числа, геометрическая интерпретация.

19. Найти максимальное число линейно независимых векторов в системе $x_1 = \{2, -1, 3, 4\}$, $x_2 = \{1, 5, 1, 3\}$, $x_3 = \{-1, 0, 2, 5\}$, $x_4 = \{0, -6, 4, 6\}$, $x_5 = \{1, 6, -2, 1\}$.

20. Доказать, что система имеет нетривиальные решения и найти фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ -x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

21. Тригонометрическая и экспоненциальная формы представления комплексных чисел.

22. Дано: $x_1 = \{2, -1, 3, 4\}$, $x_2 = \{1, 5, 1, 3\}$, $x_3 = \{-1, 0, 2, 5\}$, $x_4 = \{0, -6, 4, 6\}$, $x_5 = \{1, 6, -2, 1\}$. Выбрать их в качестве базисных e_1, e_2, e_3, e_4 и записать матрицу перехода от базиса e_i к базису e_2, e_3, e_1, e_4 .

23. Вычислить определитель $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, 1) разложив его по элементам второй строки,

2) получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце.

24. Возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа

25. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

26. Решить уравнение: $z^2 - 8z + 11 + 12i = 0$.

27. Эрмитовы квадратичные формы

28. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного в некотором

базисе матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

29. Геометрическое изображение комплексного числа

30 Исследовать на знакоопределенность $3x^2 + 10xyz + 3y^2 - 2z^2 - 14yz - 3xz + 1 = 0$

31 Экспоненциальная форма комплексного числа

32 Привести к каноническому виду и построить $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 24$

33 Тригонометрическая форма представления комплексного числа

34 Характеристическое уравнение

35 Привести к каноническому виду и построить $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$

36 Ортогональная проекция

37 Найти все подпространства действительного векторного пространства, инвариантные относительно линейного оператора A , который в некотором базисе этого пространства задан

матрицей $A = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -6 \\ -3 & 5 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

38 Найти характеристическую матрицу, хар. уравнение, хар. корни, собственные значения и векторы лин. оператора A вект. пространств, который в некотором базисе задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -6 \\ -3 & 5 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

39 Изобразить на комплексной плоскости множество точек z , удовлетворяющих условиям:

а) $1 \leq |z - 1| \leq 2$, $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$;

б) $|z - 1 - 3i| = |z + 5 + i|$.

40 Понятие образа, прообраза, преобразования, обратного преобразования, подстановки.

41 Покажите, что множество всех взаимно-однозначных отображений непустого множества X на себя с операцией – композицией преобразований – является группой. Будет ли она абелевой?

42 Докажите, что подмножество из S есть мультипликативной группой $Q^* = Q \setminus \{0\}$.

43 Понятие группы, абелевой группы. Примеры

44 Покажите, что полугруппа взаимно-однозначных отображений множества X на себя, которая вместе с каждым отображением содержит обратное ему

45 Докажите, что множество $a \circ b = \operatorname{НОД}(a, b)$ является полугруппой

46 Понятие циклической группы. Порядок группы, элемента

47 Докажите, что подмножества из S являют мультипликативной группой $\{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$.

48 Докажите, что множество $a \circ b = a$; является полугруппой

49 Понятие таблицы Кэли. Пример

50 Проверить, что множество матриц $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ с обычным сложением и

умножением является кольцом. Оно коммутативно? Содержит единицу? Если да, то укажите обратимые элементы. Найти все делители нуля, если они есть.

51 Покажите, что множество всех вращений плоскости вокруг фиксированной точки O и всех отражений плоскости относительно всех прямых, проходящих через точку O является группой. Будет ли она абелевой?

52 Понятия подгруппы и полугруппы. Примеры

53 Докажите, что подмножество из S $\{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ является мультипликативной группой.

54 Понятие изоморфизма, гомоморфизма, автоморфизма. Ядро и образ гомоморфизма

55 Докажите, что множество \mathbb{Z}^+ (неотрицательные) с обычным сложением и умножением является кольцом. Содержит ли оно единицу? Укажите обратимые элементы.

56 Определите, является алгебраической операция $a \circ b = \log_b a$ на подмножестве $\{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$ множества \mathbb{R} ; будет ли она коммутативна, ассоциативна?