

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЛГПУ»)

Институт физико-математического образования, информационных и
обслуживающих технологий
Кафедра фундаментальной математики

УТВЕРЖДАЮ

Директор Института физико-
математического образования,
информационных и обслуживающих
технологий



 Е.Е. Горбенко
« 19 »  2023 г.

Приложение к рабочей программе учебной дисциплины

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации
обучающихся по дисциплине

Теория чисел

Направление подготовки 01.03.01 Математика

Профиль подготовки Математические и цифровые технологии в образовании

Квалификация выпускника – бакалавр

Форма обучения – очная

Курс – 1

Разработчик:

доцент Давыскиба О.В.,

Заведующий кафедрой фундаментальной
математики 

Темникова С.В.

Протокол

от « 04 »  2023 г. № 5

Луганск, 2023

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

1.1. Область применения

Фонд оценочных средств (ФОС) – неотъемлемая часть рабочей программы дисциплины «Теория чисел» и предназначен для контроля и оценки образовательных достижений студентов, освоивших программу дисциплины.

1.2. Цели и задачи фонда оценочных средств

Цель ФОС — установить соответствие уровня подготовки обучающегося требованиям ФГОС ВО бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика, утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10.01.2018 № 8 (с изменениями и дополнениями).

1.3. Перечень компетенций, формируемых в процессе освоения основной образовательной программы

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций и индикаторов их достижения:

Код по ФГОС ВО	Индикатор достижения
Общепрофессиональная	
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Понимает значение накопления фундаментальных знаний в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.
	ОПК-1.2. Имеет представление об использовании фундаментальных знаний в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

1.4. Этапы формирования компетенций и средства оценивания уровня их сформированности

Этапы формирования компетенций	Компетенции	Контрольно-оценочные средства / способ оценивания
Тема 1. Отношение делимости.	ОПК-1	Устный опрос. Выполнение практических заданий.
Тема 2. Числовые функции.	ОПК-1	Устный опрос. Выполнение практических заданий.
Тема 3. Теория сравнений.	ОПК-1	Устный опрос. Выполнение практических заданий.
Тема 4. Квадратичные вычеты.	ОПК-1	Устный опрос. Выполнение практических заданий.
Промежуточная аттестация	ОПК-1	Зачет

1.5. Описание показателей формирования компетенций

Код компетенции	Результаты сформированности
Общепрофессиональная	
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	<p>Знает: применять знания законов теории чисел при решении прикладных задач, самостоятельно увидеть общие формы и закономерности теории чисел, выбирать эффективные методы решения согласно поставленным прикладным задачам.</p> <p>Умеет: самостоятельно решать типовые задачи школьного курса математики; находить и анализировать информацию, необходимую для решения поставленной задачи; составлять, решать и интерпретировать простейшие практически значимые математические модели.</p> <p>Владеет: навыками применения законов теории чисел в профессиональной деятельности, навыками решения задач теории чисел, навыками анализа общих форм и закономерностей теории чисел.</p>

1.6. Критерии оценивания компетенций на разных этапах их формирования

Вид учебной работы	Количество баллов
	ОФО
Работа на практических занятиях	34
Контрольная работа	10
Индивидуальное задание	16
Зачет	40
Всего:	100

Накопительная система оценивания по 100-балльной шкале

Четырехбалльная система оценивания экзамена	100-балльная шкала	Буквенная шкала, соответствующая 100-балльной шкале	Система оценивания зачета
Отлично	90–100	А – отлично – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному	
Хорошо	83–89	В – очень хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания	

		выполнены, качество выполнения большинства из них оценено числом баллов, близким к максимальному	Зачтено
Хорошо	75–82	С – хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью; некоторые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы недостаточно; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения ни одного из них не оценено минимальным числом баллов, некоторые виды заданий выполнены с ошибками	
Удовлетворительно	63–74	D – удовлетворительно – теоретическое содержание дисциплины освоено частично, но пробелы не носят существенного характера; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий, содержат ошибки	
Удовлетворительно	50–62	E – посредственно – теоретическое содержание курса освоено частично; некоторые практические навыки работы не сформированы, многие предусмотренные программой обучения учебные задания не выполнены либо качество выполнения некоторых из них оценено числом баллов, близким к минимальному	
Неудовлетворительно	21–49	FX – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса освоено частично; необходимые практические навыки работы не сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий не выполнено либо качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимальному; при дополнительной самостоятельной работе над материалом курса возможно повышение качества выполнения учебных заданий	Не зачтено
Неудовлетворительно	0–20	F – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса не освоено; необходимые практические навыки работы не сформированы; все выполненные учебные задания содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом курса не приведет к какому-либо значимому повышению качества выполнения учебных заданий	

2. КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА

2.1. Оценочные средства текущего контроля

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ КОНТРОЛЬНЫХ ВОПРОСОВ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Что такое простое число?
2. Каково определение функции $\pi(x)$?
3. Вычислите $\pi(0, 5)$, $\pi(2, 999)$, $\pi(17)$.
4. Что такое бесконечная цепная дробь?
5. Приведите примеры бесконечных цепных дробей.
6. Что такое квадратичная иррациональность?
7. Приведите примеры квадратичных иррациональностей.
8. Что такое (смешанно) периодическая бесконечная цепная дробь?
9. Приведите примеры (смешанно) периодических бесконечных цепных дробей.
10. Сформулируйте теорему Лагранжа.
11. Изложите основные идеи доказательства теоремы Лагранжа.
12. Разложите в бесконечные цепные дроби иррациональности $\sqrt{13}$, $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$.
13. Сформулируйте теорему о чисто периодических бесконечных цепных дробях.
14. Сформулируйте теорему о разложении в периодические бесконечные цепные дроби квадратных корней из натуральных неквадратных чисел.
15. Разложите в бесконечные цепные дроби $\sqrt{12}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{19}$.
16. Что такое подходящие дроби ?
17. Приведите примеры подходящих дробей.
18. Сформулируйте основные свойства подходящих дробей.
19. Докажите несколько нетривиальных свойств подходящих дробей.
20. Обоснуйте сходимость подходящих дробей.
21. Найдите приближение числа e подходящими дробями с точностью до 0,001.
22. Сформулируйте и докажите результат о том, что рациональная дробь, достаточно хорошо аппроксимирующая действительное число, совпадает с одной из подходящих дробей.
23. Что такое полиномиальное сравнение?
24. Что такое система полиномиальных сравнений?
25. Что значит решить систему полиномиальных сравнений?
26. Сформулируйте теорему о структуре решений системы сравнений первой степени.
27. Приведите примеры совместной и несовместной систем сравнений первой степени.

28. Докажите что любая система сравнений первой степени эквивалентна системе сравнений с попарно взаимно простыми модулями.

29. Решите системы:

$$\begin{cases} 2 \cdot x \equiv 1 \pmod{6} \\ 3 \cdot x \equiv 2 \pmod{4} \\ 5 \cdot x \equiv 7 \pmod{8} \end{cases}, \begin{cases} 32 \cdot x \equiv 14 \pmod{24} \\ 13 \cdot x \equiv 222 \pmod{144} \\ 15 \cdot x \equiv 77 \pmod{88} \end{cases}, \begin{cases} 32 \cdot x \equiv 14 \pmod{27} \\ 13 \cdot x \equiv 22 \pmod{144} \\ 15 \cdot x \equiv 77 \pmod{88} \end{cases}.$$

30. Квадратичные вычеты.

31. Что такое квадратичное сравнение?

32. Что такое квадратичный вычет и невычет?

33. Приведите примеры квадратичных вычетов и невычетов по различным модулям.

34. Докажите, что по любому простому модулю количество квадратичных вычетов равно количеству квадратичных невычетов.

35. Докажите, что решение произвольного квадратичного сравнения $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{m}$ сводится к решению двучленного сравнения вида $x^2 \equiv A \pmod{m}$.

36. Опишите алгоритм решения сравнения вида $x^2 \equiv A \pmod{m}$ по любому модулю m .

37. Решите квадратичные сравнения:

$$3x^2 + 2x - 5 \equiv 0 \pmod{5}, \quad 8x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod{12}.$$

38. Символ Лежандра и закон взаимности Гаусса.

39. Что такое символ Лежандра?

40. Какая связь символа Лежандра с квадратичными сравнениями?

41. Сформулируйте основные правила для вычисления символа Лежандра.

42. Докажите несколько нетривиальных правил.

43. Вычислите $\left(\frac{15}{7}\right), \left(\frac{43}{59}\right), \left(\frac{55}{2}\right)$.

44. Сформулируйте квадратичный закон взаимности Гаусса.

45. Как связаны $\left(\frac{43}{59}\right)$ и $\left(\frac{59}{43}\right), \left(\frac{53}{2}\right)$ и $\left(\frac{2}{53}\right), \left(\frac{37}{101}\right)$ и $\left(\frac{101}{37}\right)$?

46. Разрешимы ли сравнения: $x^2 \equiv 17 \pmod{43}, x^2 \equiv 43 \pmod{17}$?

47. Опишите основные идеи любимого Вами доказательства квадратичного закона взаимности Гаусса.

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ

1. Укажите частное и остаток от деления ± 520 на ± 23 .
2. Двумя способами найдите $\text{НОК}[134, 126]$ и $\text{НОД}(134, 126)$, вычислите линейное разложение $\text{НОД}(134, 126)$.
3. Докажите, что если $x^2 + y^2 = z^2$, то $x \cdot y \vdots 12$.
4. При каких $n \in \mathbb{N}$ $2^{2n+1} - 5 \vdots 3$?

5. При каких $n \in \mathbb{N}$ $n^3 - 5n + 2 \div 7$?
6. Разложите $\frac{2121}{1500}$ в конечную цепную дробь и найдите все её подходящие дроби.
7. Найдите каноническое разложение числа $n = 1496$.
8. Найдите число и сумму натуральных делителей числа 1358.
9. Найдите число и сумму целых делителей числа 1358.
10. Докажите, что сумма трёх последовательных натуральных степеней числа 2 делится на 14.
11. С помощью конечных цепных дробей найдите линейное разложение $\text{НОД}(1340, 1260)$.
12. Разложите $\sqrt{5}$ в бесконечную цепную дробь.
13. Найдите первые три цифры разложения в бесконечную цепную дробь числа 2π .

2.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации

Теоретические вопросы для проведения зачета

1. Теорема о делении целых чисел с остатком.
2. Основные свойства делимости целых чисел нацело.
3. НОД и НОК целых чисел: определение, свойства, способы нахождения, примеры.
4. Алгоритм Евклида и линейное разложение $\text{НОД}(a, b)$.
5. Взаимно простые числа и их свойства. Примеры.
6. Простые числа и их свойства. Основная теорема арифметики.
7. Вычисление $\text{НОД}(a, b)$ и $\text{НОК}[a, b]$ с помощью канонических разложений чисел a, b .
8. Функция Эйлера: определение, вычисление, примеры.
9. Функция Эйлера: мультипликативность, примеры.
10. Бесконечность множества простых чисел. Решето Эратосфена.
11. Представление рациональных чисел конечными цепными дробями.
12. Подходящие дроби и их основные свойства.
13. Представление иррациональных чисел бесконечными цепными дробями. Примеры.
14. Квадратичные иррациональности и периодические бесконечные цепные дроби. Примеры.
15. Сравнения и их свойства. Проверка арифметических действий с помощью сравнений. Примеры.
16. Признаки делимости на 2^n , 5^n , 3, 9, 11.
17. Теоремы Эйлера и Ферма. Примеры использования для вычисления остатков.

18. Полиномиальные сравнения и их решения. Редукция сравнения по составному модулю к модулю, являющемуся степенью простого числа, а затем – к простому модулю.
19. Теорема о сравнениях первой степени. Различные методы решения сравнений первой степени.
20. Показатели и их свойства. Первообразные корни. Нахождение первообразных корней.
21. Существование первообразных корней по простому модулю.
22. Представление рациональных чисел десятичными дробями. Длина периода десятичного представления рационального числа.
23. Индексы и их свойства. Таблицы индексов и антииндексов. Решение двучленных сравнений $a \cdot x^n \equiv b \pmod{m}$ с помощью индексов. Примеры.
24. Числа алгебраические и трансцендентные. Теорема Лиувилля и построение трансцендентных чисел.