

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ЛГПУ»)

Институт физико-математического образования, информационных и  
обслуживающих технологий  
Кафедра фундаментальной математики

УТВЕРЖДАЮ

Директор Института физико-  
математического образования,  
информационных и обслуживающих  
технологий


 Е.Е. Горбенко  
«15» января 2023 г.

Приложение к рабочей программе учебной дисциплины

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ  
для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации  
обучающихся по дисциплине

Функциональный анализ

По направлению подготовки 01.03.01 Математика  
Профиль подготовки Математические и цифровые технологии в  
образовании  
Квалификация выпускника бакалавр  
Форма обучения очная  
Курс 3

Разработчик  
доцент Скринникова А.В.  
Заведующий кафедрой  
фундаментальной математики  
 Темникова С.В.

Протокол  
от «14» января 2023 г. № 5

Луганск, 2023

# 1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

## 1.1. Область применения

Фонд оценочных средств (ФОС) – неотъемлемая часть рабочей программы дисциплины «Функциональный анализ» и предназначен для контроля и оценки образовательных достижений студентов, освоивших программу дисциплины.

## 1.2. Цели и задачи фонда оценочных средств

Цель ФОС – установить соответствие уровня подготовки обучающегося требованиям ФГОС ВО бакалавриата по направлению подготовки 01.03.01 Математика, утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 8 (с изменениями и дополнениями).

## 1.3. Перечень компетенций, формируемых в процессе освоения основной образовательной программы

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций и индикаторов их достижения:

Код по ФГОС ВО	Индикатор достижения
Общепрофессиональные	
ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности.	ОПК-1.2. Имеет представление об использовании фундаментальных знаний в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

## 1.4. Этапы формирования компетенций и средства оценивания уровня их сформированности

Этапы формирования компетенций	Компетенции	Контрольно-оценочные средства / способ оценивания
Тема 1. Метрические пространства.	ОПК-1	Домашние задания, контрольная работа, устный опрос, экзамен
Тема 2. Мера Лебега. Измеримые функции. Интеграл Лебега.	ОПК-1	Домашние задания, контрольная работа, устный опрос, экзамен
Тема 3. Измеримые функции. Интеграл Лебега.	ОПК-1	Домашние задания, контрольная работа, устный опрос, экзамен
Тема 4. Нормированные пространства.	ОПК-1	Домашние задания, контрольная работа, устный опрос, экзамен
Тема 5. Линейные функционалы.	ОПК-1	Домашние задания, контрольная работа, устный опрос, экзамен
Тема 6. Операторы	ОПК-1	Домашние задания, контрольная работа, устный опрос, экзамен
Промежуточная аттестация	ОПК-1	Экзамен

### 1.5. Описание показателей формирования компетенций

Код компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели)
ОПК-1	<p>знает: основные понятия, определения и свойства объектов функционального анализа;</p> <p>умеет: решать задачи функционального анализа;</p> <p>владеет: навыками применения аппарата функционального анализа в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания</p>

### 1.6. Критерии оценивания компетенций на разных этапах их формирования

Вид текущей учебной работы	Количество баллов
Работа на практических занятиях	20
Контроль самостоятельной работы	30
Экзамен (письменный)	50
Итого за семестр:	100

### Накопительная система оценивания по 100-балльной шкале

Четырехбалльная система оценивания экзамена	100-балльная шкала	Буквенная шкала, соответствующая 100-балльной шкале	Система оценивания зачета
Отлично	90–100	А – отлично – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному	Зачтено
Хорошо	83–89	В – очень хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения большинства из них оценено числом баллов, близким к максимальному	
Хорошо	75–82	С – хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью; некоторые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы недостаточно; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения ни одного из них не оценено минимальным числом баллов, некоторые виды	

		заданий выполнены с ошибками	
Удовлетворительно	<b>63–74</b>	<b>D</b> – удовлетворительно – теоретическое содержание дисциплины освоено частично, но пробелы не носят существенного характера; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий, содержат ошибки	
Удовлетворительно	<b>50–62</b>	<b>E</b> – посредственно – теоретическое содержание курса освоено частично; некоторые практические навыки работы не сформированы, многие предусмотренные программой обучения учебные задания не выполнены либо качество выполнения некоторых из них оценено числом баллов, близким к минимальному	
Неудовлетворительно	<b>21–49</b>	<b>FX</b> – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса освоено частично; необходимые практические навыки работы не сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий не выполнено либо качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимальному; при дополнительной самостоятельной работе над материалом курса возможно повышение качества выполнения учебных заданий	Не зачтено
Неудовлетворительно	<b>0–20</b>	<b>F</b> – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса не освоено; необходимые практические навыки работы не сформированы; все выполненные учебные задания содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом курса не приведет к какому-либо значимому повышению качества выполнения учебных заданий	

## 2. КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА

### 2.1. Оценочные средства текущего контроля (типовые)

#### Вопросы для устного опроса

- 1 Предел последовательности и предел отображения метрических пространств.
- 2 Непрерывность отображений.
- 3 Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах.
- 4 Полные метрические пространства.
- 5 Сжимающие отображения.
- 6 Теоремы о неподвижной точке.
- 7 Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра.
- 8 Теорема о вложенных шарах.
- 9 Множества первой категории и теорема Бэра.
- 10 Предкомпактные множества.
- 11 Теорема Арцела. Критерий Хаусдорфа.
- 12 Понятие алгебра.
- 13 Мера на полукольце.
- 14 Измеримые по Лебегу множества.
- 15 Мера Лебега. Измеримые функции.
- 16 Различные виды сходимости.
- 17 Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла.
- 18 Неравенство Чебышева.
- 19 Теорема Лузина.
- 20 Мера Лебега-Стилтьеса.
- 21 Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.
- 22 Полные и тотальные системы векторов.
- 23 Норма функционала.
- 24 Сильная, слабая и \*-слабая сходимость.
- 25 Критерий слабой сходимости последовательности.
- 26 Теорема Банаха об обратном операторе.
- 27 Спектр и резольвента оператора.
- 28 Компактные операторы.
- 29 Симметрические, самосопряжённые и унитарные операторы.
- 30 Преобразования Фурье. Обобщённые функции.

#### Контрольная работа «Метрические, нормированные и гильбертовы пространства». (КР 1)

##### *Примерный вариант*

1. Решить уравнение методом итерации  $x(t) = at + b \int_0^1 tsx(s)ds$ , взяв  $x_0(t) = 0$  (предварительно выяснить, при каких « $b$ » метод итерации сходится в  $C[0,1]$ ,  $L[0,1]$ ).

2. Принадлежат ли элементы  $x = \left\{ \frac{1}{2^n} \right\}, y = \left\{ \frac{1}{3^n} \right\}, (n = 1, 2, \dots)$  сфере

$S(0,1)$  с центром в точке  $O(0,0,\dots)$  и радиуса 0,5 в пространстве  $l_2$ .

3. Доказать, что множество  $E$  на плоскости, заданное системой  
$$\begin{cases} x + y > 4 \\ x^2 + y^2 < 81 \end{cases}$$
 открыто.

4. Ряд Фурье по ортогональной системе в гильбертовом пространстве. Нахождение элемента наилучшего приближения.

### Контрольная работа «Непрерывные линейные и функционалы и операторы» (КР 2)

#### Примерный вариант

1. Доказать, что функционал

$$x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2 \rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{5^n}$$

является линейным, непрерывным, действующим из  $l_2$  в  $l_2$ . Найти его норму.

2. Исследовать и решить линейное неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$x(t) - \mu \int_{-1}^1 (ts - t^2 s^2) x(s) ds = t^2 + t^4.$$

3. Доказать, что  $A$  – компактный оператор. Найти его спектр и собственные функции.

$$A: L_2 \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow L_2 \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right], Ax(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(t,s) x(s) ds, \text{ где}$$

$$K(t,s) = \begin{cases} \sin t \cos s, & \text{а} \text{ñ} \text{ñ} 0 \leq t \leq s \leq \frac{\pi}{2}, \\ \cos t \sin s, & \text{а} \text{ñ} \text{ñ} 0 \leq s \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

#### Домашнее задание (ДЗ 1)

##### Примерные задачи

1. При каких  $\mu$  интегральное уравнение Фредгольма

$$\text{а) } x(t) - \mu \int_0^{\pi} \cos t \sin s x(s) ds = f(t)$$

решается методом последовательных приближений в пространствах  $C[0,\pi]$ ,  $L_2[0,\pi]$ ?

$$\text{б) } x(t) - \mu \int_{-1}^1 \sin \pi t \pi e^{2s} x(s) ds = f(t) \text{ решается методом последовательных}$$

приближений в пространствах  $C[-1,1]$  и  $L_2[-1,1]$ ?

2. Найти угол между элементами

a)  $x(t) = t, y(t) = e^{-t}$  в пространстве  $L_2[0, \pi]$ ;

b)  $x = \left\{ \frac{5}{2^{n-1}} \right\}$  и  $x = \left\{ \frac{2}{5^{n-1}} \right\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) в пространстве  $l_2$ .

3. Найти расстояние между элементами  $x = \left\{ \frac{(-1)^n}{3^n} \right\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) и  $x = \left\{ \frac{5}{4^n} \right\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

4. Найти норму элемента  $x(t) = te^{-t}$  в пространствах  $L_1[0, 2], L_2[0, 2]$ .

5. Методом итерации найти приближенно с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$  единственное решение уравнения

$$x = 1 + \frac{1}{4}x$$

на промежутке  $[0, \sqrt{3}]$ , сделав 4 шага итерации (обосновать применимость метода итерации).

6. Метод последовательных приближений в метрическом пространстве. Сжимающие отображения. Теорема Банаха.

7. Линейные нормированные пространства. Банаховы пространства. Определение. Примеры.

### **Домашнее задание (ДЗ 2)**

#### *Примерные задачи*

1. Рассмотрим оператор  $A: L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ ,  $Ax(t) = \int_0^1 K(t, s)x(s)ds$ ,

$$K(t, s) = \begin{cases} \frac{t(l-s)}{l}, & \text{если } 0 \leq t \leq s \leq l, \\ \frac{s(l-t)}{l}, & \text{если } 0 \leq s \leq t \leq l. \end{cases}$$

Доказать, что  $A$  – самосопряженный компактный оператор. Найти его спектр и ортонормированные собственные функции.

2. Решить линейное неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\text{a) } x(t) - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos x(s) ds = 3 \sin t.$$

$$\text{b) } x(t) - 4 \sin^2 t \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(s) ds = 2t - \pi.$$

3. Доказать, что функционал  $f(x) = \int_{-1}^1 x(s)ds - 3x(0)$  определен в  $C[-1, 1]$ , линеен, непрерывен, ограничен. Найти его норму.

4. Рассмотрим оператор  $A$ , действующий из  $l_p$  в  $l_p$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $1 < p, q < \infty$ ):

$$x = \{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_p \rightarrow y = Ax = \{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}, \eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} \zeta_k \quad (i=1, 2, \dots), \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}|^q < \infty.$$

Показать, что  $A$  – линейный ограниченный оператор и оценить его норму.

5. Показать, что оператор  $A$

$$Ax(t) = \int_0^1 tsx(s)ds$$

действует из  $C[a, b]$  в  $C[a, b]$ , линеен, непрерывен. Найти его норму.

6. Линейные ограниченные операторы в линейном нормированном пространстве. Нормы операторов. Обратные операторы. Теорема Банаха об обратном операторе.

7. Вполне непрерывные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Теорема Гильберта-Шмидта.

## 2.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации (экзамен)

### Вопросы к экзамену за 5 семестр

1. Неравенства Гельдера и Минковского (интегральные и дискретные).
2. Метрические пространства. Свойства.
3. Сходимость в метрических пространствах.
4. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах и их свойства.
5. Структура открытых и замкнутых множеств на прямой.
6. Полные метрические пространства. Свойства.
7. Примеры полных и неполных метрических пространств.
8. Пополнение метрических пространств.
9. Мера и интеграл Лебега. Пространства Лебега.
10. Сепарабельные метрические пространства.
11. Примеры сепарабельных и несепарабельных метрических пространств.
12. Непрерывные отображения метрических пространств.
13. Неподвижные точки.
14. Понятие о методе последовательных отображений.
15. Принцип сжимающих отображений. Теорема Банаха.
16. Применение принципа сжимающих отображений к приближенному решению нелинейных скалярных уравнений.
17. Применение принципа сжимающих отображений к приближенному решению линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода.
18. Обобщенный принцип сжимающих отображений.
19. Применение обобщенного принципа сжимающих отображений к решению интегральных уравнений Вольтерра.



## **Вопросы к экзамену за 6 семестр**

1. Линейные нормированные пространства и их свойства.
2. Линейные пространства со скалярным произведением. Свойства.
3. Гильбертовы пространства.
4. Понятие ортогональности. Свойства.
5. Теорема Реллиха об ортогональном разложении гильбертова пространства.
6. Понятие об элементе наилучшего приближения в гильбертовом пространстве.
7. Ортогональные системы в сепарабельном гильбертовом пространстве.
8. Теорема об ортогонализации.
9. Ряды Фурье в абстрактном гильбертовом пространстве и их свойства.
10. Нахождение элемента наилучшего приближения в гильбертовом пространстве.
11. Понятие о базисе.
12. Существование ортогонального базиса в гильбертовом пространстве.
13. Топологические пространства.
14. Линейные топологические пространства.
15. Непрерывные линейные операторы. Ограниченность.
16. Норма линейного оператора и ее вычисление.
17. Непрерывные линейные функционалы.
18. Норма ограниченного функционала и ее геометрический смысл.
19. Теорема Банаха - Хана в гильбертовых пространствах.
20. Операции над линейными операторами.
21. Алгебра операторов.
22. Обратный оператор и его свойства.
23. Теорема об обратных операторах.
24. Последовательность линейных операторов.
25. Теорема Банаха-Штейнгауза.
26. Сходимость последовательности средних Фейера для тригонометрических рядов Фурье.
27. Теорема Рисса об общем виде ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.
28. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.
29. Нахождение собственных значений и собственных функций интегрального оператора Фредгольма.
30. Спектр линейного оператора.
31. Компактность в линейных нормированных пространствах.
32. Критерий компактности.
33. Достаточные условия компактности множества.
34. Компактные операторы в линейных нормированных пространствах.

и их свойства.

35. Операторы нормального типа: ограниченность, симметричность, компактность.

36. Симметричные компактные операторы в гильбертовых пространствах. Определение.

37. Свойства собственных значений и собственных векторов симметричных компактных операторов в гильбертовом пространстве.

38. Структура спектра.

39. Теорема Гильберта - Шмидта.

40. Алгоритм решения симметричных интегральных уравнений Фредгольма второго рода с помощью разложения по собственным функциям.

#### Примерные задачи

1. Найти расстояние между бесконечными числовыми последовательностями  $x$  и  $y$  в пространстве  $l^1$ , где

$$x = \left( \frac{1^2}{2^1}, \frac{2^2}{2^2}, \frac{3^2}{2^3}, \frac{4^2}{2^4}, \frac{5^2}{2^5}, \dots \right), y = \left( 0, \frac{1^2}{2^1}, \frac{2^2}{2^2}, \frac{3^2}{2^3}, \frac{4^2}{2^4}, \dots \right).$$

2. В пространстве  $L_2[0,1]$  задано подпространство  $V_0$  с помощью базиса  $f_1 = f_1(t) = 1, f_2 = f_2(t) = e^t$ . Для заданной функции  $x = x(t) = 3 - 2t$  найти элемент наилучшего приближения в  $L_2[0,1]$  и величину отклонения от  $V_0$ .

3. Найти сопряженный оператор  $A^*$  к оператору  $A: l_2 \rightarrow l_2$ , действующему по следующим формулам  $Ax = (x_1, 0, x_2, 0, \dots)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$ . Будет ли  $A$  самосопряженным?

4. В пространстве  $L_2[-1,1]$  ортонормировать систему функций  $\{1; t - 8; t^2 - 2t; t^3\}$ .