

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ЛГПУ»)

Институт физико-математического образования, информационных и  
обслуживающих технологий  
Кафедра фундаментальной математики

УТВЕРЖДАЮ

Директор Института физико-  
математического образования,  
информационных и обслуживающих  
технологий


 Е.Е. Горбенко  
«10» декабря 2023 г.

Приложение к рабочей программе учебной дисциплины

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**  
для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации  
обучающихся по дисциплине

Теория функций комплексного переменного

По направлению подготовки 01.03.01. Математика  
Профиль подготовки Математические и цифровые технологии в  
образовании  
Квалификация выпускника бакалавр  
Форма обучения очная  
Курс 4

Разработчик  
доцент Скринникова А.В.  
Заведующий кафедрой  
фундаментальной математики  
 Темникова С.В.

Протокол  
от «04» декабря 2023 г. № 5

Луганск, 2023

## 1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

### 1.1. Область применения

Фонд оценочных средств (ФОС) – неотъемлемая часть рабочей программы дисциплины «Теория функций комплексного переменного» и предназначен для контроля и оценки образовательных достижений студентов, освоивших программу дисциплины.

### 1.2. Цели и задачи фонда оценочных средств

Цель ФОС — установить соответствие уровня подготовки обучающегося требованиям ФГОС ВО бакалавриата по направлению подготовки 01.03.01 Математика, утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 8 (с изменениями и дополнениями).

### 1.3. Перечень компетенций, формируемых в процессе освоения основной образовательной программы

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций и индикаторов их достижения:

Код по ФГОС ВО	Индикатор достижения
Универсальные	
УК-1.	УК-1.3. Демонстрирует знание особенностей системного и критического мышления, аргументированно формирует собственное суждение и оценку информации, принимает обоснованное решение
Общепрофессиональные	
ОПК-1.	ОПК-1.2. Имеет представление об использовании фундаментальных знаний в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

### 1.4. Этапы формирования компетенций и средства оценивания уровня их сформированности

Этапы формирования компетенций	Компетенции	Контрольно-оценочные средства / способ оценивания
Тема 1. Комплексные числа и действия над ними.	ОПК-1	Проверка решений задач, устный опрос
Тема 2. Функции комплексного переменного.	ОПК-1	Проверка решений задач, устный опрос
Тема 3. Производная функции комплексного переменного.	ОПК-1	Проверка решений задач, устный опрос
Тема 4. Интегралы и ряды.	ОПК-1	Проверка решений задач, устный опрос

Промежуточная аттестация	ОПК-1	Экзамен
--------------------------	-------	---------

### 1.5. Описание показателей формирования компетенций

Код компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели)
ОПК-1	<p><b>знает:</b> основные понятия теории функций комплексного переменного;</p> <p><b>умеет:</b> решать задачи вычислительного и теоретического характера в области комплексного анализа;</p> <p><b>владеет:</b> навыками применения математического аппарата комплексного анализа, методами решения задач и доказательства утверждений в этой области.</p>

### 1.6. Критерии оценивания компетенций на разных этапах их формирования

Вид текущей учебной работы	Количество баллов
Работа на практических занятиях	20
Контроль самостоятельной работы	30
Экзамен (письменный)	50
Итого за семестр:	100

### Накопительная система оценивания по 100-балльной шкале

Четырехбалльная система оценивания экзамена	100-балльная шкала	Буквенная шкала, соответствующая 100-балльной шкале	Система оценивания зачета
Отлично	90–100	<b>А</b> – отлично – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному	Зачтено
Хорошо	83–89	<b>В</b> – очень хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения большинства из них оценено числом баллов, близким к максимальному	
Хорошо	75–82	<b>С</b> – хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью; некоторые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы недостаточно; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество	

		выполнения ни одного из них не оценено минимальным числом баллов, некоторые виды заданий выполнены с ошибками	
Удовлетворительно	<b>63–74</b>	<b>D</b> – удовлетворительно – теоретическое содержание дисциплины освоено частично, но пробелы не носят существенного характера; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий, содержат ошибки	
Удовлетворительно	<b>50–62</b>	<b>E</b> – посредственно – теоретическое содержание курса освоено частично; некоторые практические навыки работы не сформированы, многие предусмотренные программой обучения учебные задания не выполнены либо качество выполнения некоторых из них оценено числом баллов, близким к минимальному	
Неудовлетворительно	<b>21–49</b>	<b>FX</b> – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса освоено частично; необходимые практические навыки работы не сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий не выполнено либо качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимальному; при дополнительной самостоятельной работе над материалом курса возможно повышение качества выполнения учебных заданий	Не зачтено
Неудовлетворительно	<b>0–20</b>	<b>F</b> – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса не освоено; необходимые практические навыки работы не сформированы; все выполненные учебные задания содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом курса не приведет к какому-либо значимому повышению качества выполнения учебных заданий	

## 2. КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА

### 2.1. Оценочные средства текущего контроля (типовые)

#### Вопросы для устного опроса

1. Интеграл типа Коши функции с комплексным переменным.
2. Теоремы о существовании производных высших порядков, о среднем и теорема Морера.
3. Ряды с комплексными членами.
4. Теорема Вейерштрасса.

5. Степенные ряды, теорема Абеля и формула Коши-Адамара.
6. Ряд Тейлора, теорема Тейлора.
7. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Тейлора.
8. Теорема Лиувилля.
9. Теорема единственности.
10. Аналитическое продолжение вдоль пути, теорема единственности.
11. Теорема об инвариантности аналитического продолжения по гомотопным путям.
12. Принцип непрерывного продолжения.
13. Принцип симметрии Римана-Шварца.
14. Понятие об аналитической функции.
15. Понятие о римановой поверхности.
16. Римановы поверхности некоторых элементарных функций.
17. Изолированные особые точки аналитических функций.

**Примерные задания для контрольной работы и письменной экзаменационной работы:**

1. Найти все значения корня  $\sqrt[4]{-128 - 128i\sqrt{3}}$ .
2. Представить в алгебраической форме
  - a)  $\sinh(2 - \pi i)$ . b)  $\operatorname{Arcth}\left(\frac{3\sqrt{3} + 8i}{7}\right)$ .
3. Вычертить область, заданную неравенствами  $|z - 1| < 1, \arg z \leq \pi/4,$   
 $\arg(z - 1) > \pi/4$ .
4. Определить вид кривой  $z = t^2 + 2t + 5 + i(t^2 + 2t + 1)$ .
5. Проверить, что  $u(v)$  является действительной (мнимой) частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z_0$  функцию  $f(z)$  по известной действительной части  $u(x, y)$  или мнимой  $v(x, y)$  и значению  $f(z_0)$ .:  $u = -2xy - 2y, f(0) = i$ .
6. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:  $\int_{ABC} z \operatorname{Im} z^2 dz$ ;  $AB$  – отрезок прямой,  $z_A = 0, z_B = 1 + i$ .
7. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням:  $\frac{6z + 144}{72z^2 + 6z^3 - z^4}$ .
8. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$ .:  $\frac{2z}{z^2 + 4}, z_0 = 3 + 2i$ .
9. Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки  $z_0$ .  $z \sin \pi \frac{z-1}{z-2}, z_0 = 2$ .

10. Определить тип особой точки  $z = 0$  для данной функции:  $\frac{\sin z^4 - z^4}{\sinh z - z - z^3/6}$ .

11. Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип:  $\frac{\cos \pi z}{(4z^2 - 1)(z^2 + 1)}$

12. Вычислить интеграл:

a)  $\oint_{|z|=1} \frac{\sin^2 z}{z \cos z} dz$ ; b)  $\oint_{|z|=2} z^3 \cos \frac{2i}{z} dz$ ; c)  $\oint_{|z|=0,2} \frac{\cosh 2z - \cos 2z}{z^2 \sin 8z} dz$ ;

d)  $\oint_{|z-2i|=2} \left( \frac{2 \sin \frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)} - \frac{\pi}{e^{\pi z/2} + 1} \right) dz$ ; e)  $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{2} \sin t + 3}$ ;

f)  $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{3} + \sqrt{2} \cos t)^2}$ ; g)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 2}{x^4 + 7x^2 + 12} dx$ ; h)  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 16)(x^2 + 9)}$ .

## 2.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации (экзамен)

1. Понятие о комплексных числах и действия над ними.
2. Изображение комплексных чисел на сфере Римана.
3. Формулы стереографической проекции.
4. Топология комплексной плоскости.
5. Понятие пути и кривой на комплексной плоскости.
6. Области на комплексной плоскости.
7. Комплекснозначные функции комплексного переменного.
8. Предел функции, непрерывность, модуль непрерывности.
9. Дифференцируемость функции комплексного переменного.
10. Условия Коши-Римана.
11. Производная функции комплексного переменного.
12. Голоморфные функции.
13. Геометрическая интерпретация R- и C-дифференцируемости.
14. Конформные отображения 1-го и 2-го рода.
15. Геометрический смысл модуля и аргумента производной.
16. Гидродинамический смысл C-дифференцируемости.
17. Свойства стереографической проекции: круговое свойство, свойство инвариантности углов, вращение сферы вокруг диаметра  $OP$  на угол  $\pi$ .
18. Элементарные функции, дробно-линейная функция.
19. Круговое свойство дробно-линейной функции.
20. Свойство сохранения симметричных точек при дробно-линейном отображении, групповое свойство.
21. Неподвижные точки дробно-линейных отображений.

22. Свойство инвариантности ангармонического отношения четырех точек при дробно-линейном отображении.
23. Дробно-линейные изоморфизмы и автоморфизмы.
24. Классификация дробно-линейных отображений.
25. Степенная функция.
26. Функция Жуковского.
27. Показательная функция.
28. Тригонометрические и гиперболические функции.
29. Криволинейный интеграл от функции комплексного переменного и его свойства.
30. Первообразная от функции комплексного переменного и его свойства.
31. Интегральная теорема Коши для треугольника.
32. Теоремы о существовании локальной первообразной и первообразной вдоль пути.
33. Интегральная теорема Коши и ее обобщения.
34. Интегральная формула Коши. Формула Коши-Грина.
35. Интеграл типа Коши.
36. Теоремы о существовании производных высших порядков, о среднем и теорема Морера.
37. Ряды с комплексными членами. Теорема Вейерштрасса.
38. Степенные ряды, теорема Абеля и формула Коши-Адамара.
39. Ряд Тэйлора, теорема Тэйлора, неравенство Коши для коэффициентов ряда Тэйлора, теорема Лиувилля, теорема единственности.
40. Ряд Лорана, область его сходимости.
41. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана, единственность разложения.
42. Формулы и неравенства Коши.
43. Классификация изолированных особых точек.
44. Устранимая особая точка.
45. Полюс. Существенно особая точка.
46. Теорема Сохоцкого.
47. Целые и мероморфные функции.
48. Теория вычетов, теорема Коши о вычетах.
49. Теорема о полной сумме вычетов, вычисления вычета в полюсе порядка  $n$ .
50. Вычисление некоторых вещественных интегралов, лемма Жордана.
51. Аналитическое продолжение. Элементы аналитических функций.
52. Аналитическое продолжение вдоль пути, теорема единственности.
53. Теорема об инвариантности аналитического продолжения по гомотопным путям.
54. Принцип непрерывного продолжения.
55. Принцип симметрии Римана-Шварца.
56. Понятие об аналитической функции.
57. Теорема Пуанкаре – Вольтерра.

58. Теорема о монодромии.
59. Понятие о римановой поверхности. Римановы поверхности некоторых элементарных функций.
60. Изолированные особые точки аналитических функций. Принцип аргумента.
61. Теорема о представлении аналитической функции в окрестности ее точки ветвления конечного порядка.
62. Теорема Руше.
63. Принцип сохранения области.
64. Задача о локальном обращении голоморфной функции.
65. Эффективное решение задачи о локальном обращении голоморфной функции.
66. Ряд Бурмана - Лагранжа.
67. Принцип максимума модуля и лемма Шварца.
68. Теорема Римана о конформном отображении и теоремы о соответствии границ.
69. Группы автоморфизмов канонических областей.
70. Формула Кристоффеля - Шварца.
71. Отображение произвольного треугольника.
72. Отображение прямоугольника - эллиптический интеграл первого рода.
73. Эллиптический синус.
74. Понятие об автоморфных и в частности об эллиптических функциях.
75. Модулярная функция.
76. Теоремы Пикара о целых и мероморфных функциях.
77. Теорема Миттаг-Лефлера (без доказательства).
78. Теорема Коши о разложении мероморфной функции на простейшие дроби.
79. Разложение некоторых элементарных функций в ряд главных частей.
80. Бесконечные произведения, критерии сходимости.
81. Разложение целых функций в бесконечные произведения.
82. Теорема Вейерштрасса (без доказательства).